

Теорема Хинчина о системах Чебышева

Н.Г. Мощевитин¹

В 2006 году были переизданы основные труды А.Я. Хинчина по теории чисел [9]. Большинство из них посвящено теории диофантовых приближений, в частности, многомерным диофантовым приближениям. Несомненно, что основополагающей в этой области является работа [6], опубликованная в 1926 году. В ней в зародыше имеется практически вся теория линейных однородных и неоднородных диофантовых приближений, развивавшаяся впоследствии как самим Хинчиным, так и другими математиками - например, В. Ярником, К. Малером, Дж. Касселсом. Однако многие классические результаты Хинчина (равно как и его последователей) оказывались забытыми и даже неоднократно передоказывались другими математиками.

В настоящей статье мы сравниваем оригинальный результат Хинчина об эквивалентности свойства матрицы быть регулярной и свойства матрицы быть матрицей Чебышева (основной результат статьи [8]) и его изложение в книге Касселса "Диофантовы приближения" [2]. Оказывается, что формулировка Хинчина и формулировка Касселса различны, хотя и эквивалентны. Это будет обсуждаться в пунктах 1 и 4 ниже.

Кроме того, мы вносим ясность в вопрос, как связаны результаты Хинчина о теоремах переноса для однородной и неоднородной задач [8], и соответствующие результаты Ярника [4, 5]. Об этом уже написано в нашем обзоре (пункт 6.2 из [11]). Там сделан акцент на то, что основной результат Хинчина из работы [8] 1948 года фактически уже имелся в малоизвестной работе Ярника [4]² и в ее более позднем варианте [5]. Это действительно так, но, к сожалению, изложение вопроса в [11] оказалось запутанным и не везде верным³. В пункте 2 настоящей работы мы дословно приведем формулировки необходимых теорем Ярника и сравним их с результатами Хинчина. Оказывается, что формулировка Ярника ближе к формулировке из Касселса, чем к оригинальной формулировке Хинчина.

1. Теорема о регулярных системах и системах Чебышева: Хинчин и Касселс.

Пусть m и n суть натуральные числа. Положим $d = m + n$. Мы будем иметь дело с системой из n линейных форм от m целочисленных переменных. Для вещественной матрицы

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1^1 & \cdots & \theta_1^m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_n^1 & \cdots & \theta_n^m \end{pmatrix}$$

рассмотрим соответствующую систему линейных форм

$$L_j(\mathbf{x}) = L_j^\Theta(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \theta_j^i x_i, \quad 1 \leq j \leq n.$$

¹Работа поддержана грантами РФФИ № 12-01-00681а и Правительства России, проект 11. G34.31.0053.

²датируемой 1941 годом и изданной в Праге на чешском языке

³Например, следствие теоремы 28 (принадлежащей Ярнику) из пункта 6.2 из [11] на самом деле следует не из этой теоремы (как утверждается в [11]), а из другой теоремы Ярника (Věta 6 из [4]), которая в [11] оказалась не процитированной. Также теоремы 31 и 32 из [11] не эквивалентны друг другу, как это утверждается.

Здесь $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ - набор целочисленных переменных. Через ${}^t\Theta$ будем обозначать транспонированную матрицу, соответствующую транспонированную систему линейных форм будем обозначать

$${}^tL_i(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n \theta_j^i y_j, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Целочисленным набором переменных будет здесь $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$.

Мы будем рассматривать функции

$$\psi(t) = \psi^\Theta(t) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m: 0 < \max |x_i| \leq t} \max_{1 \leq j \leq n} \|L_j(\mathbf{x})\|,$$

$${}^t\psi(t) = \psi^{t\Theta(t)}(t) = \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n: 0 < \max |y_i| \leq t} \max_{1 \leq i \leq m} \|{}^tL_i(\mathbf{y})\|.$$

Из теоремы Минковского о выпуклом теле следует, что при $t \geq 1$ выполнено

$$\psi(t) \leq t^{-\frac{m}{n}}, \quad {}^t\psi(t) \leq t^{-\frac{n}{m}}.$$

По Хинчину "если при любом $\varepsilon > 0$ и любом достаточно большом t могут быть решены в целых числах неравенства

$$|L_j| < \frac{1}{t} \quad 1 \leq j \leq n, \quad 0 < \max_{1 \leq i \leq m} |x_i| < \varepsilon t^{\frac{n}{m}}, \quad (1)$$

то мы называем систему чисел θ_j^i (или систему линейных форм, или систему уравнений $L_j = 0$) сингулярной".

Таким образом, матрица Θ является сингулярной, если для любого $\varepsilon' > 0$ при достаточно больших t выполнено

$$\psi(t) < \varepsilon' t^{-\frac{m}{n}},$$

или

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{m}{n}} \psi(t) = 0.$$

Матрицы, не являющиеся сингулярными, называются *регулярными*. Итак, Θ регулярна, если при некотором положительном ε найдется возрастающая к бесконечности последовательность t_k такая, что при $t = t_k$ система неравенств (1) не имеет решений в целых числах, или, что то же самое,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{m}{n}} \psi(t) > 0.$$

Приведем достоверно определение Хинчина системы Чебышева [8]. Хинчин пишет⁵: "Будем называть систему чисел θ_j^i системой Чебышева, если, каковы бы ни были вещественные числа α_j ($1 \leq j \leq n$), существует такая положительная постоянная Γ , что система неравенств

$$|L_j^\Theta(\mathbf{x}) - y_j - \alpha_j| < \frac{\Gamma}{x^{\frac{m}{n}}} \quad (2)$$

⁴добавим, или матрицу Θ

⁵Мы стараемся, по возможности, приводить точные цитаты; тем не менее, нам приходится немного изменить обозначения, чтобы они соответствовали друг другу всюду в настоящей статье. Например, в оригинальной работе Хинчина [8] через L_j обозначалась линейная форма от $m+1$ переменных $L_j = \sum_{i=1}^m \theta_j^i x_i - y_j$, и неравенства (2) выглядели следующим образом:

$$|L_j - \alpha_j| < \frac{\Gamma}{x^{\frac{m}{n}}}.$$

имеет целочисленные решения $x_i, y_j, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ с каким угодно большим $\max_{1 \leq i \leq m} |x_i|$."

Итак, по Хинчину система Θ называется системой Чебышева, если

$$\forall \alpha \exists \Gamma \forall x_0 \exists \text{ решение системы (2) с } x \geq x_0. \quad (3)$$

Основным результатом работы Хинчина [8] является следующая теорема (мы дословно приводим формулировку Хинчина).

Теорема А. (Хинчин [8]) *Регулярность системы чисел θ_j^i (или системы форм L_j , или системы уравнений $L_j = 0$ ⁶) является необходимым и достаточным условием для того, чтобы эта система была системой Чебышева.*

Дословно приведем формулировку соответствующей теоремы из книги Касселса [2]. (теорема XIII из параграфа 7 главы V). Для этого прежде отметим, что определение сингулярной и регулярной матрицы у Касселса точно такое же, как и приведенное выше определение Хинчина.

Теорема Б. (Касселс [2]) *Для того, чтобы система $L_j(\mathbf{x})$ была регулярна, необходимо и достаточно, чтобы существовало число $\delta > 0$, такое, что неравенство*

$$\left(\max_j \|L_j(\mathbf{x}) - \alpha_j\| \right)^n \left(\max_i |x_i| \right)^m < \delta$$

имело бесконечно много целых решений \mathbf{x} для каждого действительного α .

Роль величины Γ из определения Хинчина у Касселса играет величина $\delta^{\frac{1}{n}}$.

Мы видим, что по Касселсу, эквивалентным условием регулярности системы $L_j(\mathbf{x})$ (или матрицы Θ , что то же самое) является следующее высказывание:

$$\exists \Gamma \forall \alpha \forall x_0 \exists \text{ решение системы (2) с } x \geq x_0. \quad (4)$$

Неожиданным наблюдением для нас является то, что высказывания (3) и (4), вообще говоря, различные - они отличаются порядком кванторов. Как учат студентов, такие высказывания вовсе не обязаны быть равносильными. Высказывание (3) предполагает, что Γ зависит от α , в то время как высказывание (4) предполагает, что Γ одно и то же для всех α .

Тем не менее и оригинальное докательство Хинчина, и доказательство, из книги Касселса являются верными. Таким образом оказывается, что в рассматриваемой здесь задаче (3) и (4) эквивалентны, и кванторы переставить можно.

Объяснение этого в следующем. В явном виде можно построить функцию $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ и в более-менее явном виде можно указать по матрице Θ вектор $\eta^\Theta = (\eta_1^\Theta, \dots, \eta_n^\Theta) \in \mathbb{R}^n$ такой что если рассмотреть величину

$$\Delta = \liminf_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m, |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} \left(\max_{1 \leq j \leq n} \|L_j(\mathbf{x}) - \eta_j^\Theta\| \right)^n \left(\max_i |x_i| \right)^m$$

и окажется, что $\Delta < +\infty$, то для любого вектора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ будет выполнено

$$\liminf_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m, |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} \left(\max_{1 \leq j \leq n} \|L_j(\mathbf{x}) - \alpha_j\| \right)^n \left(\max_i |x_i| \right)^m \leq g(\Delta).$$

⁶или матрицы Θ

В пункте 4 мы приведем точную формулировку этого результата. Но для этого нам потребуется сказать несколько слов о том, как строится множество допустимых векторов η . Это мы сделаем в пункте 3.

2. Регулярность и свойство Чебышева: Хинчин и Ярник.

Для того, чтобы привести в оригинальном виде результат Ярника из работ [4, 5] нам понадобится функция

$$\psi^{\Theta, \alpha}(t) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{\mathbf{0}\} : \max |x_i| \leq t} \max_{1 \leq j \leq n} \|L_j(\mathbf{x}) - \alpha_j\|,$$

определенные для вещественного вектора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Во всех теоремах ниже предполагается что $\varphi(t)$ и $\rho(t)$ положительные убывающие функции вещественного аргумента, причем взаимно обратные. Дополнительно предполагается, что $\varphi(0) = \rho(0) = 0$, что для некоторого $\eta > 0$ функция $\varphi(t) \cdot t^{-\eta}$ возрастает в интервале $t > 0$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) \cdot t^{-\eta} = +\infty$. Кроме того, предполагается что выполнено $\varphi(\alpha t) > \alpha^\eta \varphi(t)$ для всех $\alpha > 1, t > 0$.

Ярник [4] доказал следующие две теоремы (Věta 5, 7 из [4]):

Теорема В. *Если*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) \cdot {}^t\psi(t) > a > 0,$$

то

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \rho(t) \sup_{\alpha: 0 \leq \alpha_j \leq 1} \psi^{\Theta, \alpha}(t) \leq A,$$

где

$$A = \frac{3}{2} d! d \max \left(1, \left(\frac{d! d}{2a} \right)^{1/\eta} \right).$$

Теорема Г. *Если*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) {}^t\psi(t) < \infty,$$

то найдется вектор α , такой что

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \rho(t) \psi^{\Theta, \alpha}(t) > 0.$$

Если положить $\varphi(t) = \gamma t^{\frac{n}{m}}$ то $\rho(t) = (t/\gamma)^{\frac{m}{n}}$, $\gamma > 0$, то происходит следующее.

1. Из теоремы В получаем, что *если матрица ${}^t\Theta$ регулярна, то матрица Θ удовлетворяет высказыванию (4).*

2. Из теоремы Г получаем, что *если матрица ${}^t\Theta$ сингулярна, то матрица Θ не удовлетворяет высказыванию (4).*

Итак Ярник в [4] доказал что регулярность матрицы ${}^t\Theta$ эквивалентна высказыванию (4) для матрицы Θ . В пункте 6.2 нашей обзорной работы [11] утверждается нечто другое - то что Ярник доказал что регулярность матрицы ${}^t\Theta$ эквивалентна тому, что Θ есть матрица Чебышева, то есть удовлетворяет (3).

Последнее, конечно, в каком-то смысле верно, ибо (3) и (4) действительно эквивалентны. Но ни у Хинчина, ни у Ярника, ни у Касселса мы не нашли в явном виде утверждения о том, что (3) и (4) эквивалентны.

Утверждение о том, что матрица Θ сингулярна тогда и только тогда, когда сингулярна матрица ${}^t\Theta$ в явном виде в работах Ярника [4, 5] *не содержится*. Это утверждение

составляет основной результат работы Хинчина [7] 1948 года. Однако оно сразу следует из общей теоремы Малера⁷ (Satz 1 из работы [10] 1939 года).

3. Наилучшие приближения и множество \mathcal{N}_Θ .

Для транспонированной матрицы ${}^t\Theta$ рассмотрим (конечную или бесконечную) последовательность векторов наилучших приближений

$$\mathbf{y}_\nu = (y_{\nu,1}, \dots, y_{\nu,n}), \nu = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

(по поводу определения наилучших приближений и их простейших свойств мы сошлемся на нашу обзорную работу [11]). Естественно, наиболее интересен и важен случай, когда последовательность (5) бесконечна.

По аналогии с [11] мы будем использовать обозначения

$$Y_\nu = \max_{1 \leq j \leq n} |y_{\nu,j}|, \quad \zeta_\nu = \max_{1 \leq i \leq m} \|{}^tL_i(\mathbf{y}_\nu)\|.$$

Из теоремы Минковского о выпуклом теле сразу следует, что

$$\zeta_\nu^m Y_{\nu+1}^n \leq 1. \quad (6)$$

Определим множество

$$\mathcal{N}_\Theta = \{\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n : \inf_{\nu \in \mathbb{Z}_+} \|\eta_1 x_{\nu,1} + \dots + \eta_n x_{\nu,n}\| > 0\}$$

С одной стороны, это множество достаточно маленькое. Если последовательность (5) бесконечна, то мера Лебега множества \mathcal{N}_Θ равна нулю. С другой стороны это множество не очень маленькое - оно не пусто, и, более того, размерность Хаусдорфа множества \mathcal{N}_Θ равна размерности всего пространства \mathbb{R}^n , то есть n . Можно сказать еще больше, для произвольной матрицы Θ множество \mathcal{N} является $1/2$ -выигрышным в смысле В.М. Шмидта⁸, что есть более сильное свойство, чем обладание полной размерностью Хаусдорфа.

4. Новая формулировка.

Положим

$$K = \frac{1}{2^{d-1}\sqrt{d}} \text{vol}_{d-1}, \{\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d) \in [-1, 1]^d : z_1 + \dots + z_d = 0\}, \quad \frac{1}{\sqrt{d}} \leq K \leq \sqrt{\frac{2}{d}}, \quad (7)$$

$$R_{m,n} = \max_{0 < r < 1} r^n (1-r)^m = r_0^n (1-r_0)^m \geq \frac{1}{2^d}, \quad 0 < r_0 < 1 \quad (8)$$

и определим

$$G_{m,n}(\varepsilon) = \frac{d^d (m^m n^n)^{d(d-1)}}{(\varepsilon^d K R_0)^{d(d-1)}}.$$

Теорема 1. *Рассмотрим матрицу Θ и соответствующее ей множество \mathcal{N}_Θ . Пусть $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathcal{N}_\Theta$, и возьмем⁹ такое положительное ε , что*

$$\inf_{\nu \in \mathbb{Z}_+} \|\eta_1 x_{\nu,1} + \dots + \eta_n x_{\nu,n}\| \geq \varepsilon.$$

⁷как это и отмечается в главе V, §2 книги [2]

⁸ О выигрышных множествах имеется много литературы; см. оригинальную работу В.М. Шмидта [?] и его книгу [16]; некоторые недавние статьи о свойстве выигрышности процитированы в [11] и [12]

⁹Существует положительная постоянная $\varepsilon_{m,n}$, такая что для любой матрицы Θ найдется $\eta \in \mathcal{N}_\Theta$ с $\varepsilon \geq \varepsilon_{m,n}$ (см Лемму 2 из главы V в [2]). Это связано с тем, что для любой матрицы Θ последовательность наилучших приближений в среднем растет лакунарным образом (см., например, [1, 12]). Лучшую оценку снизу на $\varepsilon_{m,n}$ можно получить с помощью метода Переса-Шлага (см. оригинальную работу [13] или работу [14]).

Рассмотрим величину

$$\Delta = \Delta(\Theta, \eta) = \liminf_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m, |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} \left(\max_{1 \leq j \leq n} \|L_j(\mathbf{x}) - \eta_j\| \right)^n \left(\max_i |x_i| \right)^m.$$

Тогда для любого вектора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$\liminf_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m, |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} \left(\max_{1 \leq j \leq n} \|L_j(\mathbf{x}) - \alpha_j\| \right)^n \left(\max_{1 \leq i \leq m} |x_i| \right)^m \leq G_{m,n}(\varepsilon) \Delta^{d(d-1)}.$$

В качестве следствия из теоремы 1 сразу получается

Теорема 2. Для матрицы Θ выполнено высказывание (3) тогда и только тогда, когда для нее выполнено высказывание (4).

5. Схема доказательства теоремы 1.

Мы будем следовать классическому доказательству Хинчина [8, 2] Берем $\delta > \Delta$. Из тождества

$$\eta_1 y_1 + \dots + \eta_n y_n = \sum_{j=1}^n y_j \cdot (\eta_j - L_j(x)) + \sum_{i=1}^m x_i \cdot {}^t L_j(\mathbf{y})$$

при $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\nu$ получаем, что

$$\varepsilon < nY_\nu \max_{1 \leq j \leq n} \|L_j(\mathbf{x}) - \eta_j\| + m\zeta_\nu X. \quad (9)$$

Давайте в дальнейшем (для определенности) рассматривать только случай, когда последовательность (5) бесконечна. Выберем тогда ν из условия

$$(R_0 Y_\nu)^{\frac{n}{m}} \leq X < (R_0 Y_{\nu+1})^{\frac{n}{m}},$$

где

$$R_0 = \frac{n\delta^{\frac{1}{n}}}{\varepsilon r_0},$$

а r_0 определено в (8). Если мы теперь предполагаем, что

$$\max_{1 \leq j \leq n} \|L_j(\mathbf{x}) - \eta_j\| \leq \left(\frac{\delta}{X^m} \right)^{\frac{1}{n}},$$

то из неравенства (9) и соотношения (6) получаем

$$\zeta_\nu^m Y_{\nu+1}^n \geq \omega, \quad (10)$$

где

$$\omega = \frac{\varepsilon^d r_0^n (1 - r_0)^m}{m^m n^n \delta}. \quad (11)$$

Это означает, что в $(m+n)$ -мерном параллелепипеде

$$\Pi = \{\mathbf{z} = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^d : \max_{1 \leq j \leq n} |y_j| < Y_{\nu+1}, \max_{1 \leq i \leq m} |{}^t L_i(\mathbf{y}) - x_i| \leq \zeta_\nu\}$$

нет ненулевых целых точек. Согласно принципу переноса¹⁰ в параллелепипеде

$${}^t\Pi = \{\mathbf{z} = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^d : \max_{1 \leq i \leq m} |x_i| < A, \max_{1 \leq j \leq n} |L_j(\mathbf{x}) - y_j| \leq B\},$$

где

$$A = KY_{\nu+1}^n \zeta_\nu^{m-1}, \quad B = KY_{\nu+1}^{n-1} \zeta_\nu^m, \quad (12)$$

а K определено в (7), тоже нет не тривиальных целых точек. Для d -мерного объема этого параллелепипеда имеет место равенство

$$\text{vol } {}^t\Pi = 2^d A^n B^n = (2K)^d (\zeta_\nu^m Y_{\nu+1}^n)^{d-1} \geq (2K)^d \omega^{d-1}.$$

Рассмотрим последовательные минимумы $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ параллелепипеда ${}^t\Pi$ по отношению к целочисленной решетке \mathbb{Z}^d . Ясно, что $\lambda_{d-1} \geq \dots \geq \lambda_1 \geq 1$. Используя теорему Минковского, видим, что

$$\lambda_d \leq \frac{2^d}{\lambda_1 \dots \lambda_{d-1} \text{vol } {}^t\Pi} \leq \frac{1}{K^d \omega^{d-1}}.$$

Так как в параллелепипеде $\lambda_d {}^t\Pi$ имеется d независимых целых точек, то параллелепипед¹¹

$$\Pi^* = \frac{d}{K^d \omega^{d-1}} \cdot {}^t\Pi \supset d\lambda_d \cdot {}^t\Pi$$

содержит фундаментальную область по отношению к решетке \mathbb{Z}^d . Значит для любого вектора $\xi \in \mathbb{R}^d$ трансляция $\Pi^* + \xi$ содержит некоторую целую точку. В частности, для любого $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ найдется целая точка $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m$, такая что

$$\max_{1 \leq i \leq m} |x_i| \leq \frac{d}{K^d \omega^{d-1}} \cdot A, \quad \max_{1 \leq j \leq n} \|L_j(\mathbf{x}) - \alpha_j\| \leq \frac{d}{K^d \omega^{d-1}} \cdot B.$$

Таким образом, с учетом (6,11,12) получаем

$$\begin{aligned} \left(\max_{1 \leq j \leq n} \|L_j(\mathbf{x}) - \alpha_j\| \right)^n \left(\max_{1 \leq i \leq m} |x_i| \right)^m &\leq \frac{d^d}{K^{d^2} \omega^{d(d-1)}} A^n B^m = \\ &= \frac{d^d}{(K\omega)^{d(d-1)}} (\zeta_\nu^m Y_{\nu+1}^n)^{d-1} \leq \frac{d^d}{(K\omega)^{d(d-1)}} = G_{m,n} \delta^{d(d-1)}. \end{aligned}$$

Поскольку $\delta > \Delta$ можно выбирать сколь угодно близким к Δ , теорема 1 доказана.

References

- [1] Y. Bugeaud, M. Laurent, On exponents of homogeneous and inhomogeneous Diophantine approximations, Moscow Math.J. 5.4 (2005), 747 - 766.

¹⁰ Здесь мы используем теорему К. Малера из [10] (излагаемую в главе V книги [2]), точнее, несколько более сильный результат О.Н. Германа [3], который дает более точное значение константы. Вообще говоря в некоторых других местах нашего доказательства возникающие постоянные тоже можно выбирать оптимальнее, чем это сделано у нас.

¹¹ Скорее всего, множитель в определении параллелепипеда Π^* выбран не оптимально. Если можно взять меньший множитель, то, естественно, константа в теореме 1 будет лучше.

- [2] Дж.В.С. Касселс, Введение в теорию диофантовых приближений. М., изд. Иностранной литературы., 1961.
- [3] O.N. German, On Diophantine exponents and Khintchine's transference principle, Moscow J. Combin. Number Theory, 2:2 (2012), 22 - 51.
- [4] V. Jarnik, On lineárních nehomogenních diofantických aproximacích, Rozprawy II. Tridy Ceske Akademie, Rocnik LI, Cislo 29, 1 - 21 (1941).
- [5] V. Jarnik, Sur les approximations diophantiques lineaires non homogenes, Bulletin international de l'Academie teheque des Sciences 1946, 47 Annee, Numero 16, 1 - 16.
- [6] A.Y. Khinchine, Über eine klasse linear Diophantine Approximationen, Rendiconti Circ. Math. Palermo, 1926, 50, p.170 - 195.
- [7] А.Я. Хинчин, Теорема переноса для сингулярных систем линейных уравнений, ДАН СССР. 1948, т. 59 №2, с.217 - 218.
- [8] А.Я. Хинчин, Регулярные системы линейных уравнений и общая задача Чебышева, Известия АН СССР, серия метематическая, 1948, т. 12, с. 249 - 258.
- [9] А.Я. Хинчин, Избранные труды по теории чисел, М.: МЦНМО, 2006.
- [10] K. Mahler, Ein Übertragungsprinzip für lineare Ungleichungen, Cas. Pest Mat. Fys. 68 (1939), 85-92.
- [11] Н.Г. Мощевитин, Сингулярные диофантовы системы А.Я. Хинчина и их применение т. 65, вып. 3 (393), 2010 43 - 126; англоязычная версия¹²:
N.G. Moshchevitin, Khintchine's singular Diophantine systems and their applications, Russian Mathematical Surveys. 65:3 (2010), 433 - 511.
- [12] N.G. Moshchevitin, On some open problems in Diophantine approximation, preprint available at arXiv:1202.4539v5 (2012).
- [13] Y. Peres, W. Schlag, Two Erdős problems on lacunary sequences: chromatic numbers and Diophantine approximations, Bull. London Math. Soc., v. 42, 2 (2010), p. 295 - 300.
- [14] И.П. Рочев, О распределении дробных долей линейных форм, Фундамент. и прикл. матем., 2010, т. 16, в. 6, с. 123 - 137.
- [15] W.M.Schmidt, On badly approximable numbers and certain games, Trans. Amer. Math. Soc., 623 (1966), p. 178 - 199.
- [16] В.М.Шмидт, Диофантовы приближения, М. Мир., 1983.

¹²В англоязычной версии этой работы было исправлено достаточно много неточностей первоначальной русскоязычной версии. К сожалению много некорректных моментов там все же осталось. См., например, сноску ³ в начале работы.